Thème : Description d'un mouvement.
Cours 8 : Mouvement dans un champ de pesanteur.
(version professeur)

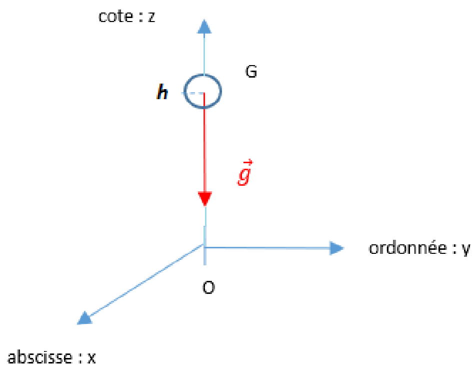
---

B.O. Mouvement dans un champ uniforme
Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme. Champ électrique créé par un condensateur plan. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme.
Principe de l'accélérateur linéaire de particules chargées.
Aspects énergétiques.
**Capacités mathématiques** : Résoudre une équation différentielle, déterminer la primitive d'une fonction, utiliser la représentation paramétrique d'une courbe.

- **Application des lois de Newton à l'étude d'un mouvement dans le champ de pesanteur considéré uniforme.**

1. Cas d'une chute libre d'une balle, sans vitesse initiale, lâchée d'une hauteur *h*.

Une chute libre signifie que le solide **n'est soumis qu'à son poids.**
On considère donc qu'il n'y a pas de frottement.
On considère que l'intensité de la pesanteur *g* est constante.




- Définir le système : la balle.
- Définir le référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen défini par un repère orthonormé dans lequel l'axe vertical est dirigé vers le haut.
- Faire le bilan des forces : le poids $\vec{P}$
  Appliquer la deuxième loi de Newton au centre d'inertie G du système :

$\sum \vec{F} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$
Soit : $\vec{P} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ Alors $m \cdot \vec{g} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ D'où $\boldsymbol{\vec{g} = \overrightarrow{a_G}}$

- Par projection dans le repère (O*x* ; O*y* ; O*z*) :

$$\overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} a_x(t) = g_x = 0 \\ a_y(t) = g_y = 0 \\ a_z(t) = g_z = -g \end{pmatrix}$$

⚠ Le signe « moins » apparait quand le vecteur $\vec{g}$ est opposé en sens à l'axe (O*y*)

$$\text{soit } \overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{pmatrix}$$

On établit les équations horaires paramétriques :

Par définition $\overrightarrow{a_G} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_G}$ en primitivant les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}$

Rappels : la primitive est la fonction réciproque de la fonction dérivée.
Exemple : la dérivée d'une constante est nulle alors la primitive d'une grandeur nulle est une constante.

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, $F$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$. Ces primitives sont uniques à une constante près notée $C$.

| $f(x)$ | $I$ | $F(x)$ |
|---|---|---|
| $\lambda$ (constante) | $\mathbb{R}$ | $\lambda x + C$ |
| $x$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{x^2}{2} + C$ |
| $x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |

On constate l'existence d'une constante $C$ dans l'expression des primitives.
En Physique, cette constante $C$ représente la valeur de la grandeur étudiée dans les conditions initiales à $t_0 = 0$.

La balle étant abandonnée dans le champ de pesanteur sans vitesse initiale, on a :

$$v_0 \begin{pmatrix} v_{0x}(0) = C_1 \\ v_{0y}(0) = C_2 \\ v_{0z}(0) = C_3 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} v_{0x}(0) = 0 \\ v_{0y}(0) = 0 \\ v_{0z}(0) = 0 \end{pmatrix} \text{ alors } C_1 = 0,\ C_2 = 0 \text{ et } C_3 = 0$$

En primitivant, on a :

$$\overrightarrow{v_G} \begin{pmatrix} v_{Gx}(t) = C_1 \\ v_{Gy}(t) = C_2 \\ v_{Gz}(t) = -gt + C_3 \end{pmatrix} \text{ or } C_1 = 0,\ C_2 = 0 \text{ et } C_3 = 0 \text{alors } \overrightarrow{v_G} \begin{pmatrix} v_{Gx}(t) = 0 \\ v_{Gy}(t) = 0 \\ v_{Gz}(t) = -gt \end{pmatrix}$$

Par définition $\overrightarrow{v_G} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ en primitivant les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{v_G}$

Pour la position, la balle étant abandonnée dans le champ de pesanteur à une hauteur $h$, on a :

$$\overrightarrow{OG_0} \begin{pmatrix} x_0 = C_4 \\ y_0 = C_5 \\ z_0 = C_6 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = h \end{pmatrix} \text{ alors } C_4 = 0,\ C_5 = 0 \text{ et } C_6 = h$$

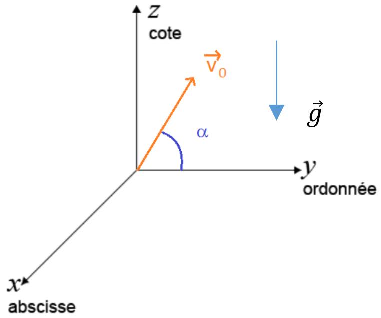
En primitivant, on a :

$$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x(t) = C_4 \\ y(t) = C_5 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_6 \end{pmatrix} \text{ or } C_4 = 0,\ C_5 = 0 \text{ et } C_6 = h \quad \text{alors } \overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix}$$

Conclusion : Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

1. . **Cas du tir d'un ballon avec vitesse initiale dans le champ de pesanteur**

Le vecteur vitesse initiale fait un angle de 60° avec l'horizontale.
La valeur du vecteur vitesse initiale est égale à $v_0$ = 30 m.s$^{-1}$
On considère qu'il n'y a pas de frottement.
L'accélération de la pesanteur est égale à $g$ = 9,81 m.s$^{-2}$




Objectifs :

- déterminer les équations horaires paramétriques du ballon.
- Déterminer l'équation de sa trajectoire.
- Déterminer à quelle distance le ballon retombera sur le sol.
- Déterminer l'altitude maximale atteinte par le ballon.

Afin de décrire le mouvement du ballon, nous allons suivre les étapes suivantes :

- définir le système
- définir le référentiel
- faire le bilan des forces
- appliquer la deuxième loi de Newton
- établir les équations horaires paramétriques en définissant les conditions initiales.
- établir l'équation de la trajectoire

- Système : le boulet de masse *m*
- Référentiel : terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$

- Appliquer la deuxième loi de Newton au centre d'inertie G du système :
  $\sum \vec{F} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$
  Soit : $\vec{P} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ Alors $m \cdot \vec{g} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ D'où $\boldsymbol{\vec{g}} = \boldsymbol{\overrightarrow{a_G}}$

- Par projection dans le repère (*Ox* ; *Oy* ; Oz) :

$$\overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} a_x(t) = g_x = 0 \\ a_y(t) = g_y = 0 \\ a_z(t) = g_z = -g \end{pmatrix}$$

soit $\overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{pmatrix}$

<u>Equations différentielles du mouvement</u> :

Par définition $\overrightarrow{a_G} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_G}$ en primitivant les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}$

Le ballon est lancé dans le champ de pesanteur avec une vitesse initiale $v_0$

$v_0 \begin{pmatrix} v_{0x}(0) = C_1 \\ v_{0y}(0) = C_2 \\ v_{0z}(0) = C_3 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} v_{0x}(0) = 0 \\ v_{0y}(0) = v_0 cos\alpha \\ v_{0z}(0) = v_0 sin\alpha \end{pmatrix}$ alors $C_1 = 0$, $C_2 = v_0 cos\alpha$ et $C_3 = v_0 sin\alpha$

En primitivant, on a :

$\overrightarrow{v_G} \begin{pmatrix} v_{Gx}(t) = C_1 \\ v_{Gy}(t) = C_2 \\ v_{Gz}(t) = -gt + C_3 \end{pmatrix}$ or $C_1 = 0$, $C_2 = v_0 cos\alpha$ et $C_3 = v_0 sin\alpha$ alors $\overrightarrow{v_G} \begin{pmatrix} v_{Gx}(t) = 0 \\ v_{Gy}(t) = v_0 cos\alpha \\ v_{Gz}(t) = -gt + v_0 sin\alpha \end{pmatrix}$

Par définition $\overrightarrow{v_G} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ en primitivant les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_G}$

Pour la position, la balle étant lancée dans le champ de pesanteur à une hauteur $h_0 = 0$, on a :

$\overrightarrow{OG_0} \begin{pmatrix} x_0 = C_4 \\ y_0 = C_5 \\ z_0 = C_6 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{pmatrix}$ alors $C_4 = 0$, $C_5 = 0$ et $C_6 = 0$

En primitivant, on a :

$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x(t) = C_4 \\ y(t) = v_0 cos\alpha \cdot t + C_5 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha \cdot t + C_6 \end{pmatrix}$ or $C_4 = 0$, $C_5 = 0$ et $C_6 = 0$ alors $\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x(t) = 0 \\ y(t) = v_0 cos\alpha \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha \cdot t \end{pmatrix}$

Dans le champ de pesanteur supposé uniforme, on constate que $x(t) = 0$, il n'y a donc aucun mouvement sur cet axe. Le mouvement du mobile s'effectue dans le plan (O, y, z).
**⟺ le mouvement est plan dans un champ uniforme.**

<u>Equation de la trajectoire</u>

Pour obtenir l'équation de la trajectoire *z*(*y*) du ballon, on isole le temps *t* de *x*(*t*) et on reporte l'expression de *t* dans *z*(*t*) :
$y(t) = v_0 cos\alpha \cdot t$ alors $t = \frac{y}{v_0 cos\alpha}$
Soit $z(y) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{y}{v_0 cos\alpha}\right)^2 + v_0 sin\alpha \cdot \left(\frac{y}{v_0 cos\alpha}\right)$
Avec $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ et en simplifiant, on peut écrire :
$z(y) = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{y^2}{v_0^2 \cdot cos^2\alpha} + y \cdot tan\alpha$

Interprétation :

- $V_y = v_{0y} = v_0 \cos \alpha =$ constante alors le mouvement sur l'axe O*y* est uniforme.
- $a_z = - g$ alors le mouvement sur l'axe O*z* est uniformément varié
  (ralenti dans la phase de montée du ballon, puis accéléré dans la phase de descente).
- L'équation de la trajectoire est du type : $z(y) = Az^2 + Bz$
  La trajectoire est donc une parabole.

**Détermination de la distance à laquelle le ballon va retoucher le sol (portée).**

Méthode : Il faut résoudre l'équation $0 = -\frac{1}{2}g \cdot \frac{y^2}{v_0^2 \cdot cos^2\alpha} + y \cdot tan\alpha$

Astuce : factoriser *y*.

Soit $0 = y(-\frac{1}{2}g \cdot \frac{y}{v_0^2 \cdot cos^2\alpha} + tan\alpha \quad )$

Il y a deux solutions.

La première est y = 0 (correspondant au point de départ du ballon.

La seconde correspond à la solution de l'équation $-\frac{1}{2}g \cdot \frac{y}{v_0^2 \cdot cos^2\alpha} + tan\alpha \quad = 0$

Soit $y = \ -\frac{-2tan\alpha \cdot v_0^2 \cdot cos^2\alpha}{g}$

En simplifiant avec $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, on a : $y = \ \frac{2sin\alpha \cdot v_0^2 \cdot cos\alpha}{g}$

Puis avec 2 sin$\alpha$ cos$\alpha$ = sin2$\alpha$, on a $y = \ \frac{sin2\alpha \cdot v_0^2}{g}$

Application numérique (A.N.)

$y = \frac{\sin{(2\times 60°)}\times 30^2}{9{,}81}$

$y$ = 79 m. Indication : un terrain de football mesure 105 m.

**Détermination de la hauteur atteinte par le ballon (flèche).**

Méthode : Il faut utiliser le fait que la vitesse $v_{Gz}(t) = -gt + v_0 sin\alpha$ est nulle au sommet de la trajectoire.
On détermine ainsi la date à laquelle le ballon atteint le sommet de la trajectoire.
Il suffira ensuite de remplacer cette valeur dans l'équation $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha \cdot t$

$-gt + v_0 sin\alpha = 0$

Soit $t = \frac{v_0 sin\alpha}{g}$

En remplaçant cette expression dans l'équation $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha \cdot t$ , on obtient :

$z(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 sin\alpha \cdot \left(\frac{v_0 sin\alpha}{g}\right)$

$z(t) = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2 sin^2\alpha}{g} + \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{g}$

$z(t) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 sin^2\alpha}{g}$

A.N.

$z(t) = \frac{1}{2} \times \frac{30^2 \times sin^2 60°}{9{,}81}$

$z(t)$ = 34 m. Indication : cette hauteur correspond à un immeuble de 10 étages.

Exercice d'application : Roméo et Juliette.

Attention : dans cet exercice, le repère n'est constitué que deux axes ! (O, *x*, *y*)

## 15 À chacun son rythme (Ap)

**COMPÉTENCES** Raisonner ; calculer.

**Cet exercice est proposé à deux niveaux de difficulté. Dans un premier temps, essayer de résoudre l'exercice de niveau 2. En cas de difficultés, passer au niveau 1.**

La nuit tombée, Roméo se tient à une distance $d$ de la maison de Juliette. Il lance un caillou de masse $m$ vers sa fenêtre de hauteur $\ell$ et qui est située à la hauteur $H$ du sol. La pierre quitte la main de Roméo avec une vitesse initiale, de valeur $v_i$, faisant un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale. À cet instant, elle se trouve à $h = 2{,}0$ m du sol. L'origine du repère d'espace est prise au niveau du sol, à l'endroit où se trouve Roméo. L'axe vertical est orienté vers le haut. Le référentiel est supposé galiléen.

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme et vaut $9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

*Données :* $d = 2{,}0$ m ; $\ell = 1{,}0$ m ; $H = 4{,}5$ m ; $\alpha = 60°$.

**Niveau 2** (énoncé compact)

La valeur de la vitesse initiale est $v_i = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Dans l'hypothèse où la pierre est en chute libre, atteindra-t-elle la fenêtre de Juliette ?

**Niveau 1** (énoncé détaillé)

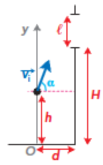
1. Schématiser la situation.
2. Dans l'hypothèse où la pierre est en chute libre, déterminer son vecteur accélération dans un référentiel terrestre en appliquant la deuxième loi de Newton.
3. Montrer que les équations horaires du mouvement de la pierre sont :

$$\begin{cases} x(t) = v_i \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}\, g \cdot t^2 + v_i \cdot \sin\alpha \cdot t + h \end{cases}$$

4. En déduire l'équation de la trajectoire de la pierre.
5. Roméo lance la pierre avec une vitesse initiale de valeur $v_i$, égale à $10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. La pierre atteindra-t-elle la fenêtre de Juliette ?

## 15 À chacun son rythme

1. Schéma de la situation :




2. Le mouvement du système {pierre}, assimilé à un point, est étudié dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son poids dans l'hypothèse d'une chute libre.

Sachant que la masse de la pierre ne varie pas, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

3. Pour un axe horizontal orienté dans le sens du mouvement et un axe vertical vers le haut :

$$a_x(t) = 0 \quad \text{et} \quad a_y(t) = -g$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

donc le vecteur vitesse a pour coordonnées :

$$v_x(t) = C_x \quad \text{et} \quad v_y(t) = -g \cdot t + C_y$$

Sachant qu'à $t = 0$ :

$$v_x(0) = v_i \cdot \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_y(0) = v_i \cdot \sin\alpha,$$

il vient, par identification :

$$v_x(t) = v_i \cdot \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_y(t) = -g \cdot t + v_i \cdot \sin\alpha.$$

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, une seconde intégration donne les équations horaires :

$$x(t) = v_i \cdot \cos\alpha \cdot t + D_x$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_i \cdot \sin\alpha \cdot t + D_y$$

Sachant qu'à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $y(0) = h$, il vient, par identification :

$$x(t) = v_i \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_i \cdot \sin\alpha \cdot t + h$$

On retrouve les équations proposées.

4. L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps dans la combinaison des équations horaires :

$$t = \frac{x}{v_i \cdot \cos\alpha}$$

d'où :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_i^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \tan\alpha \cdot x + h$$

5. On calcule l'ordonnée du point atteint par le caillou quand son abscisse est égale à $d = 2{,}0$ m :

$$y(2{,}0) = \frac{-9{,}8 \times 2{,}0^2}{2 \times 10^2 \times \cos^2(60°)} + \tan 60° \times 2{,}0 + 2{,}0$$

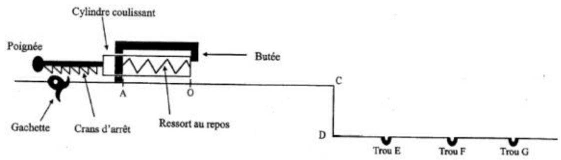
$$y(2{,}0) = 4{,}7 \text{ m.}$$

Le bas de la fenêtre étant à 4,5 m au-dessus du sol et sa hauteur égale à 1,0 m, la pierre atteindra bien la fenêtre de Juliette.

## Etude de différentes conditions initiales

Donner dans chaque cas les valeurs des constantes $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$

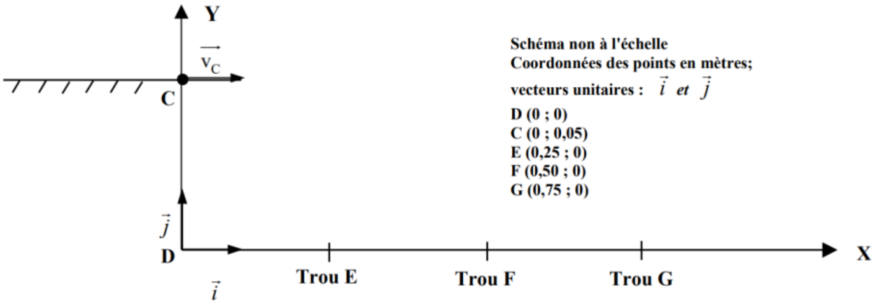
### Exemple 1




Étudions le mouvement de la bille, objet ponctuel, dans un référentiel terrestre supposé galiléen.
On néglige les frottements.

La bille quitte à la date t = 0 le plan en C avec une vitesse $v_C$ égale à 5,0 m.s$^{-1}$ et de direction horizontale.

$C_1 = 0$
$C_2 = CD$
$C_3 = V_C$
$C_4 = 0$




### Exemple 2

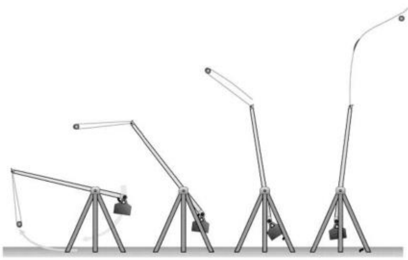
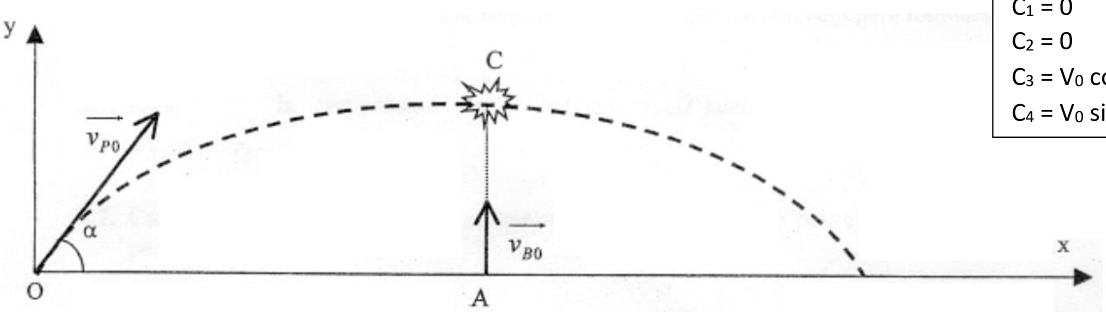



**Figure 1.**
**Tir a trébuchet**

$C_1 = 0$
$C_2 = H$
$C_3 = V_0 \cos \alpha$
$C_4 = V_0 \sin\alpha$

### Exemple 3

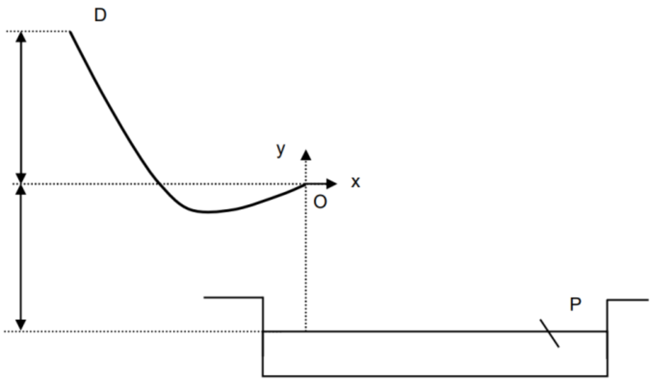
$C_1 = 0$
$C_2 = 0$
$C_3 = V_0 \cos \alpha$
$C_4 = V_0 \sin\alpha$




**Étude du mouvement du pigeon d'argile**

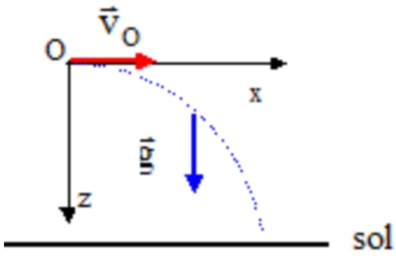
**Exemple 4**

Toboggan




$C_1 = 0$
$C_2 = 0$
$C_3 = V_0 \cos \alpha$
$C_4 = V_0 \sin\alpha$

**Exemple 5**

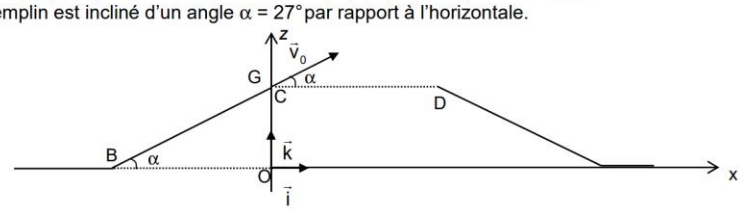



$C_1 = 0$
$C_2 = 0$
$C_3 = V_0$
$C_4 = 0$

**Exemple 6**

**2. La montée du tremplin.**

Le motard aborde le tremplin au point B, avec une vitesse de 160 km.h$^{-1}$ et maintient cette vitesse jusqu'au point C. Le repère d'étude (O, $\vec{i}$, $\vec{k}$ ) est indiqué sur la **figure 4**.
Le tremplin est incliné d'un angle α = 27° par rapport à l'horizontale.




$C_1 = 0$
$C_2 = OC$
$C_3 = V_0 \cos \alpha$
$C_4 = V_0 \sin\alpha$

**Exemple 7**
Objet abandonné dans le champ de pesanteur


$C_1 = 0$
$C_2 = 0$
$C_3 = 0$
$C_4 = 0$